Semana 6

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 12 a 20 de la Guía 2. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Antes de comenzar con los ejercicios de la semana 6, un pequeño comentario de un ejercicio de la semana 5.

Recordemos que en el **ejercicio 10** (de la semana 5) probamos que si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces, la transformación lineal $\Lambda : \mathbb{K}^n \to \mathbb{V}$ definida por

$$\Lambda([x_1\ x_2 \cdots\ x_n]^T) := x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

es un isomorfismo, es más, su inversa (que obviamente también es un isomorfismo), es la transformación lineal $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$, definida por

$$\Phi(v) = [v]^B.$$

Este hecho, nos permite enunciar una propiedad que usaremos durante todo lo que resta de la materia:

Proposición 1. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, B una base de $\mathbb{V}$ y $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$. Entonces*

el conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es LI en $\mathbb{V}$ si y sólo si $\{[u_1]^B, [u_2]^B, \cdots, [u_r]^B\}$ es LI en $\mathbb{K}^n$.

Dem. Vamos a usar la misma notación del ejercico 10.

Supongamos que $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es LI y veamos que $\{[u_1]^B, [u_2]^B, \cdots, [u_r]^B\}$ es LI en $\mathbb{K}^n$. Entonces, sean $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1[u_1]^B + a_2[u_2]^B + \cdots + a_r[u_r]^B = 0_{\mathbb{K}^n},$$

entonces

$$0_{\mathbb{K}^n} = a_1\Phi(u_1) + a_2\Phi(u_2) + \cdots + a_r\Phi(u_r) = \Phi(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r),$$

donde usamos la definición de Φ y que Φ es una transformación lineal. Entonces,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r \in Nu(\Phi) = \{0_{\mathbb{V}}\},$$

donde usamos que Φ es isomorfismo (y por ende monomorfismo). Entonces,

$$0_{\mathbb{V}} = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r$$

y como $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ es LI (por hipótesis) se sigue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ y entonces $\{[u_1]^B, [u_2]^B, \cdots, [u_r]^B\}$ es LI en $\mathbb{K}^n$.

La recíproca se prueba de manera similar y la dejamos como ejercicio, sería buena idea tratar de ver si les sale probarlo. $\square$

El siguiente ejemplo es una aplicación de este resultado:

Ejemplo: Demostrar que el conjunto $\{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ es LI en $\mathbb{R}_2[x]$.

Consideremos $E' = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, entonces $[1 + x + x^2]^{E'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[x + x^2]^{E'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $[x^2]^{E'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces, como el conjunto $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ es LI en $\mathbb{R}^3$ (por ejemplo, si ponen los vectores como filas de una matriz, la matriz queda automáticamente triangulada sin filas nulas), por la Proposición 1, concluimos que $\{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ es LI en $\mathbb{R}_2[x]$.

Buena definición de transformaciones lineales. Definición de un transformación lineal en una base

Antes de ponernos a resolver ejercicios, recordemos el siguiente resultado de transformaciones lineales

Proposición 2. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $\mathbb{V}$ de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y sean $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{W}$ vectores arbitrarios. Entonces existe una única transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que*

$$T(v_i) = w_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

La proposición anterior nos dice que si definimos una transformación lineal T sobre una base de $\mathbb{V}$ entonces T está bien definida y además es única.

Buena definición. Una transformación lineal está bien definida si: a cada elemento v del dominio de T (que en este caso es $\mathbb{V}$) le corresponde un único elemento de $\mathbb{W}$. A dicho elemento se lo denota $T(v)$.

Usando la notación de la proposición anterior, sea $v \in \mathbb{V}$ un elemento del dominio de T. Entonces, como B es una base de $\mathbb{V}$, existen **únicos** $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Entonces

$$T(v) = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n \in \mathbb{W}.$$

Por lo tanto la transformación lineal está bien definida, ya que a cada elemento del dominio de T le corresponde un único elemento de $\mathbb{W}$.

Unicidad. La proposición anterior afirma que si existe otra transformación lineal, digamos $S : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, tal que

$$S(v_i) = w_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

entonces $S = T$. Veamos eso, sea $v \in \mathbb{V}$ (el dominio de S y de T), como B es una base de $\mathbb{V}$, existen únicos $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Entonces

$$S(v) = S(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 S(v_1) + \cdots + a_n S(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = T(v).$$

Como la igualdad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$, concluimos que $S = T$ como queríamos ver.

El siguiente ejercicio permite diferenciar entre los conceptos de existencia, unicidad y buena definición de una transformación lineal. Estos tres conceptos suelen generar confusión por lo que se recomienda meditar un poco sobre qué diferencia hay entre ellos.

Ejercicio: Consideremos:

1. $T_1 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T_1(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; T_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T_2(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. $T_2 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T_2(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; T_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T_2(x+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. $T_3 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T_3(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; T_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T_3(x+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Indicar si las transformaciones lineales de los items 1., 2. y 3. están bien definidas.

b) Indicar si existe una transformación lineal que satisfaga la condiciones de los items 1., 2. ó 3. y de existir dicha transformación lineal, estudiar si es única.

Dem.

1. Como $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, por la Proposición 2, la transformación lineal T_1 está bien definida. Por la misma proposición, T_1 es la única transformación lineal que satisface las condiciones del item 1.

2. Como el conjunto $\{1, x, 1+x\}$ NO es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, la transformación lineal T_2 NO está bien definida. Observar que el vector x^2 pertenece al dominio de T_2, sin embargo, por como se definió T_2 no hay ningún elemento de $\mathbb{R}^3$ asignado a x^2, por lo tanto T_2 NO está bien definida.

   Observar por otra parte que,

$$T_2(1) + T_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T_2(1+x).$$

   Por lo tanto, NO puede existir ninguna transformación lineal que cumpla con las condiciones del item 2.

3. Como el conjunto $\{1, x, 1+x\}$ NO es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, la transformación lineal T_3 NO está bien definida. Hay elementos del dominio de T_3 a los cuáles no se le asignó ningún elemento de $\mathbb{R}^3$.

   En este caso, como

$$T_3(1) + T_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = T_3(1+x),$$

   existen (infinitas) transformaciones lineales que cumplen las condiciones del item 3. Por ejemplo, consideremos $T_v : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T_v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ T_v(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ T_v(x^2) = v,$$

   donde v es cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Entonces, para cada v de $\mathbb{R}^3$ que elijamos, la transformación lineal T_v cumple con las condiciones del item 3., está bien definida y es única (porque se definió sobre una base). Pero claramente, cambiando v, tendremos infinitas transformaciones lineales T_v que cumplan con las condiciones del item 3.

$\square$

El siguiente ejercicio es muy similar al **ejercicio 2.12**.

Ejercicio : Sea $B = \{x^2 + x, x^2 - x, 1\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ una TL que actúa sobre la base B de la siguiente manera

$$T(x^2 + x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ T(x^2 - x) = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix}, \ T(1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

a) Hallar $T(2x^2 + 3x + 5)$.

b) Hallar bases de $Nu(T)$ e $Im(T)$.

c) Hallar, (si existen) todos los $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tales que $T(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dem. a): Para hallar $T(2x^2+3x+5)$, primero escribimos al vector $2x^2+3x+5$ como CL de los elementos de la base B. Entonces, si

$$2x^2+3x+5 = a(x^2+x)+b(x^2-x)+c = x^2(a+b)+x(a-b)+1.c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Tenemos que $2 = a+b,\ 3 = a-b,\ 5 = c$. Entonces $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ y $c = 5$. Entonces,

$$T(2x^2+3x+5) = T(\frac{5}{2}(x^2+x) - \frac{1}{2}(x^2-x)+5) = \frac{5}{2}T(x^2+x) - \frac{1}{2}T(x^2-x)+5T(1) =$$

$$= \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -42 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

b): Recordemos que $Nu(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Entonces, si $p \in Nu(T)$, por un lado $p \in \mathbb{R}_2[x]$ y, como B es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, $p(x) = a(x^2+x)+b(x^2-x)+c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y, por el otro lado,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T(p) = T(a(x^2+x)+b(x^2-x)+c) = aT(x^2+x)+bT(x^2-x)+cT(1) =$$

$$= a\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \\ 4 & -12 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Entonces, basta con resolver el sistema homogéneo de arriba. Operando, nos queda que $a = 3b-2c$. Entonces, volviendo a la expresión de p, nos queda

$$p(x) = a(x^2+x)+b(x^2-x)+c = (3b-2c)(x^2+x)+b(x^2-x)+c = b(4x^2+2x)+c(-2x^2-2x+1),$$

con $b, c \in \mathbb{R}$. Es decir $Nu(T) = gen\{4x^2+2x, -2x^2-2x+1\}$ y una base de $Nu(T)$ puede ser $B_{Nu(T)} = \{4x^2+2x, -2x^2-2x+1\}$.

Recordemos que como $\{x^2+x, x^2-x, 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, entonces

$$Im(T) = gen\{T(x^2+x), T(x^2-x), T(1)\} = gen\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}\}.$$

Basta con extraer una base de ese conjunto. Por el teorema de la dimensión, sabemos que

$$\dim(T) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(Nu(T)) = 3-2 = 1.$$

Entonces, podemos obtener una base de $Im(T)$ con cualquier generador de $Im(T)$, por ejemplo $B_{Im(T)} = \{ \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix} \}$.

$c)$: Recordar que existe $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si y sólo si $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$ y eso vale por definición de $Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists p \in \mathbb{R}_2[x] : v = T(p)\}$.

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin Im(T) = gen\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -12 \end{bmatrix} \}$ concluimos que no existe p tal que $T(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\square$

Antes de resolver el siguiente ejercicio, recordar que si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ entonces se define $T^2 := T \circ T$ y por lo tanto (como la composición de TL es una TL) tenemos que $T^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. De manera similar se definen otras potencias de T como $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k veces) con $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.13 : Utilizar bases de $\mathbb{R}^3$ para construir transformaciones lineales $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tales que

a) $T^2 = \mathbf{0}$ pero $T \neq \mathbf{0}$.

c) $T^2 = I$, pero $T \neq I$.

Dem. $a)$: Observar que, si $T^2 = \mathbf{0}$, entonces $Im(T) \subseteq Nu(T)$. De hecho, si $y \in Im(T)$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $y = T(x)$. Entonces, $T(y) = T(T(x)) = T^2(x) = \mathbf{0}(x) = 0$ y entonces $y \in Nu(T)$. Como $T \neq \mathbf{0}$, entonces $Nu(T) \subsetneq \mathbb{R}^3$, entonces $\dim(Nu(T)) \leq 2$.

Por el Teorema de la dimensión, $\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Nu(T)) \geq 3 - 2 = 1$. Y como probamos que $Im(T) \subseteq Nu(T)$, tenemos también que $1 \leq \dim(Im(T)) \leq \dim(Nu(T)) \leq 2$ y además $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 3$.

Entonces, la única opción que nos queda es que $\dim(Im(T)) = 1$, $\dim(Nu(T)) = 2$ y asegurarnos que $Im(T) \subseteq Nu(T)$. Las demás combinaciones no nos sirven.

Teniendo todo esto en cuenta podemos definir T, por ejemplo en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces T cumple con lo pedido pues, $T \neq \mathbf{0}$ e $Im(T) = gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \} \subseteq Nu(T) = gen\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

$c)$: Observar que si $T^2 = I$, entonces $Im(T) = \mathbb{R}^3$. Para probar esto último, observar que siempre vale que $Im(T^2) \subseteq Im(T)$. De hecho, si $y \in Im(T^2)$ entonces existe $x \in \mathbb{R}^3$, tal que

$y = T^2(x) = T(T(x))$, entonces $y \in Im(T)$ (existe $x' \in \mathbb{R}^3$, tal que $y = T(x')$, en este caso $x' = T(x)$).

Por lo tanto, como $T^2 = I$, tenemos que $Im(T^2) = Im(I) = \mathbb{R}^3$, y entonces,

$$\mathbb{R}^3 = Im(T^2) \subseteq Im(T) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Entonces, como probamos la doble inclusión se sigue que $Im(T) = \mathbb{R}^3$ es decir T es epimorfismo. Además, por el teorema de la dimensión, $\dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Im(T) = 3-3 = 0$, entonces $Nu(T) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ y T es monomorsfismo. Por lo tanto T es isomorfismo y existe T^{-1}. Es más, como $TT = T^2 = I$, se sigue que $T^{-1} = T$.

Teniendo todo esto en cuenta podemos definir T, por ejemplo en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces T cumple con lo pedido. Por un lado, $T \neq I$, ya que, por ejemplo, $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por el otro lado,

$$T^2(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T^2(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T^2(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, T^2 cumple que $T^2(e_i) = I(e_i)$, con $i = 1, 2, 3$ y e_1, e_2, e_3, los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La proposición 2 nos dice que eso implica que $T^2 = I$ (meditar el por qué de esta última afirmación). $\square$

Ejercico 14 : Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comprobar que la aplicación $T : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ definida por

$$T(p) = p' - \lambda p$$

es un isomorfismo.

Dem. Tomemos a $\mathbb{C}_n[x]$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial (abajo hay algunos comentarios sobre cómo se resuelve el ejercicio si tomamos como cuerpo $\mathbb{R}$) y probemos que T es monomorfismo, es decir veamos que $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sea $p \in Nu(T)$, entonces, por un lado $p \in \mathbb{C}_n[x]$ es decir

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ y, por otro lado,

$$\mathbf{0} = T(p) = p' - \lambda p.$$

Es decir, para cada $x \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$0 = \mathbf{0}(x) = T(p)(x) = p'(x) - \lambda p(x) =$$

$$= a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_2 2x + a_1 - \lambda(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) =$$
$$= x^n(-\lambda a_n) + x^{n-1}(a_n n - \lambda a_{n-1}) + \cdots + x(a_2 2 - \lambda a_1) + 1(a_1 - \lambda a_0).$$

Es decir, tenemos que

$$0 = x^n(-\lambda a_n) + x^{n-1}(a_n n - \lambda a_{n-1}) + \cdots + x(a_2 2 - \lambda a_1) + 1(a_1 - \lambda a_0), \text{ para todo } x \in \mathbb{C}.$$

Entonces, usando por ejemplo que $\{x^n, x^{n-1}, \cdots, x, 1\}$ es una base de $\mathbb{C}_n[x]$, (y arriba nos quedó una CL de los elementos de la base igualada al elemento neutro de $\mathbb{C}_n[x]$), tenemos que

$$-\lambda a_n = a_n n - \lambda a_{n-1} = \cdots = a_2 2 - \lambda a_1 = a_1 - \lambda a_0 = 0.$$

Entonces, como $-\lambda a_n = 0$ y $\lambda \neq 0$, tenemos que $a_n = 0$. De la misma manera, como $\lambda a_{n-1} = a_n n = 0.n = 0$ y $\lambda \neq 0$, tenemos que $a_{n-1} = 0$. Si seguimos así, en el paso $n-1$ tendremos que $a_2 = 0$, entonces como $\lambda a_1 = a_2 2 = 0$ y $\lambda \neq 0$, tenemos que $a_1 = 0$. Finalmente, como $\lambda a_0 = a_1 = 0$ y $\lambda \neq 0$, tenemos que $a_0 = 0$. Entonces, probamos que $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ y volviendo a la expresión de p, nos queda que $p(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}$, es decir $p = \mathbf{0}$. Por lo tanto $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ y T es monomorfismo. Finalmente, por el teorema de la dimensión,

$$\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{C}_n[x]) - \dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{C}_n[x]) - 0 = \dim(\mathbb{C}_n[x])$$

y como siempre vale que $Im(T) \subseteq \mathbb{C}_n[x]$, tenemos que $Im(T) = \mathbb{C}_n[x]$ y T es epimorfismo. Como T es monomorfismo y epimorfismo, concluimos que T es isomorfismo. □

Nota: En el ejercicio anterior tomamos a $\mathbb{C}_n[x]$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Si tomamos a $\mathbb{C}_n[x]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, entonces $\{x^n, ix^n, x^{n-1}, ix^{n-1}, \cdots, x, ix, 1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}_n[x]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Entonces si $p \in Nu(T)$, tenemos por un lado que

$$p(x) = a_n x^n + b_n i x^n + a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1} i x^{n-1} + \cdots + a_1 x + b_1 i x + a_0 + b_0 i,$$

con $a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}, \cdots, a_1, b_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ y, por el otro lado

$$\mathbf{0} = T(p) = p' - \lambda p.$$

Entonces, operando de manera similar como arriba, nos queda que $0 = x^n(-\lambda a_n) + x^{n-1}(a_n n - \lambda a_{n-1}) + \cdots + x(a_2 2 - \lambda a_1) + 1(a_1 - \lambda a_0) + + ix^n(-\lambda b_n) + ix^{n-1}(b_n n - \lambda b_{n-1}) + \cdots + ix(b_2 2 - \lambda b_1) + i(b_1 - \lambda b_0)$.

Entonces, como $\{x^n, ix^n, x^{n-1}, ix^{n-1} \cdots, x, ix, 1, i\}$ es una base de $\mathbb{C}_n[x]$, nos queda que

$$-\lambda a_n = a_n n - \lambda a_{n-1} = \cdots = a_2 2 - \lambda a_1 = a_1 - \lambda a_0 =$$
$$= -\lambda b_n = b_n n - \lambda b_{n-1} = \cdots = b_2 2 - \lambda b_1 = b_1 - \lambda b_0 = 0.$$

Entonces, con argumentos similares a los que usamos arriba, concluiremos que $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = b_n = b_{n-1} = \cdots = b_2 = b_1 = b_0 = 0$, entonces $p = \mathbf{0}$ y $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$. Entonces T es monomorfismo y como los espacios de salida y de llegada de la traansfromación lineal T son los mismos (tienen la misma dimensión) esto implica que T es isomorfismo.

Matriz de una transformación lineal

Definición. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ una base de $\mathbb{W}$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Se llama* matriz de T en las bases B_1 y B_2, *a la matriz $[T]_{B_1}^{B_2} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definida por*

$$[T]_{B_1}^{B_2} = [\ [T(v_1)]^{B_2}\ [T(v_2)]^{B_2}\ \cdots\ [T(v_n)]^{B_2}].$$

Es decir $[T]_{B_1}^{B_2}$ es la matriz que en sus columnas tiene las coordenadas en base B_2 de los transformados de los vectores de la base B_1.

A partir de la definición de matriz de una transformación lineal, se deduce la siguiente propiedad,

$$\boxed{[T(v)]^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}\ [v]^{B_1}, \text{ para cada } v \in \mathbb{V}. \qquad (1)}$$

De hecho, si $v \in \mathbb{V}$ entonces existen $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Entonces, como T es TL, tenemos que $T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$. Entonces, usando que tomar coordenadas es lineal (lo probamos en la semana 4), tenemos que

$$[T(v)]^{B_2} = [a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)]^{B_2} = a_1[T(v_1)]^{B_2} + a_2[T(v_2)]^{B_2} + \cdots + a_n[T(v_n)]^{B_2} =$$

$$= [T]_{B_1}^{B_2} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix} = [T]_{B_1}^{B_2}\ [v]^{B_1}.$$

Ejercicio 19 a): Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Definimos $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, como

$$T(x) := Ax.$$

Entonces si E es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y F es la base canónica de $\mathbb{K}^m$. Tenemos que

$$[T]_E^F = A.$$

Dem. Recordemos que la base canónica de $\mathbb{K}^n$, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, donde e_i es el vector de $\mathbb{K}^n$ que tiene 0 en todas sus componentes salvo en el lugar i donde vale 1. Y la base canónica de $\mathbb{K}^m$, $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$, donde f_i es el vector de $\mathbb{K}^m$ que tiene 0 en todas sus componentes salvo en el lugar i donde vale 1.

Recordemos también, que si $w \in \mathbb{K}^m$ entonces $[w]^F = w$, porque F es la base canónica de $\mathbb{K}^m$. Si no se convencen de esto último, hagan la cuenta y les va a salir.

Por último, recordemos que $Ae_i = col_i(A)$, donde $col_i(A)$ denota la columna i-ésima de la matriz A. Es decir, si multiplicamos A por el vector i-ésimo de la base canónica de K^n obtenemos la columna i-ésima de la matriz A.

Entonces, por definición de $[T]_E^F$, tenemos que

$$[T]_E^F = [\ [T(e_1)]^F\ [T(e_2)]^F\ \cdots\ [T(e_n)]^F] =$$

$$= [\ [Ae_1]^F\ [Ae_2]^F\ \cdots\ [Ae_n]^F] = [\ Ae_1\ Ae_2\ \cdots\ Ae_n] = [col_1(A)\ col_2(A)\ \cdots\ col_n(A)] = A$$

y probamos lo que queríamos. $\square$

Ejercicio 19 c): Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$, la transformación lineal definida por

$$T(p) := [p(0)\ p(1)\ p(10)\ p(100)]^T.$$

Hallar $[T]_{E'}^E$, donde E' es la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y E la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Dem. Recordar que $E' = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $E = \{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$. Además, $T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$, $T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10^2 \\ 10^4 \end{bmatrix}$ y $T(x^3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10^3 \\ 10^6 \end{bmatrix}$. Entonces, por definición de $[T]_{E'}^E$, tenemos que

$$[T]_{E'}^E = [\ [T(1)]^E\ [T(x)]^E\ [T(x^2)]^E\ [T(x^3)]^E] =$$

$$= [\ [\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}]^E\ [\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}]^E\ [\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10^2 \\ 10^4 \end{bmatrix}]^E\ [\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10^3 \\ 10^6 \end{bmatrix}]^E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 10^2 & 10^3 \\ 1 & 100 & 10^4 & 10^6 \end{bmatrix}.$$

$\square$

El siguiente resultado lo usaremos ampliamente cuando trabajemos con una matriz de una transformación lineal.

Proposición 3. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 una base de $\mathbb{V}$ y B_2 una base de $\mathbb{W}$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Entonces,*

a) $v \in Nu(T)$ si y sólo si $[v]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$. Más aún $\dim(Nu(T)) = \dim(nul([T]_{B_1}^{B_2}))$,

b) $w \in Im(T)$ si y sólo si $[w]^{B_2} \in col([T]_{B_1}^{B_2})$. Más aún $\dim(Im(T)) = \dim(col([T]_{B_1}^{B_2}))$.

Dem. Supongamos que $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ es una base de $\mathbb{W}$.

a): Probemos la doble implicación. Supongamos que $v \in Nu(T)$, veamos que $[v]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$. De hecho, si $v \in Nu(T)$ entonces $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$, por la ecuación (1), tenemos que

$$[T]_{B_1}^{B_2}\ [v]^{B_1} = [T(v)]^{B_2} = [0_{\mathbb{W}}]^{B_2} = 0_{\mathbb{K}^m}$$

y entonces $[v]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$. Recíprocamente, si $[v]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$, de nuevo por la ecuación (1), tenemos que

$$0_{\mathbb{K}^m} = [T]_{B_1}^{B_2}\ [v]^{B_1} = [T(v)]^{B_2}.$$

Entonces $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$ y $v \in Nu(T)$.

Más aún, veamos que si $\{[x_1]^{B_1}, [x_2]^{B_1}, \cdots, [x_r]^{B_1}\}$ es una base de $nul([T]_{B_1}^{B_2})$ entonces $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ es una base de $Nu(T)$.

Por un lado, por lo que acabamos de ver, como $[x_1]^{B_1}, [x_2]^{B_1}, \cdots, [x_r]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$ entonces $x_1, x_2, \cdots, x_r \in Nu(T)$, entonces se sigue que $gen\{x_1, x_2, \cdots, x_r\} \subseteq Nu(T)$.

Por otra parte, si $z \in Nu(T)$, por lo que acabamos de ver, que $[z]^{B_1} \in nul([T]_{B_1}^{B_2})$, entonces existen $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$[z]^{B_1} = a_1[x_1]^{B_1} + a_2[x_2]^{B_1} + \cdots + a_r[x_r]^{B_1}.$$

Usando que tomar coordenadas es lineal, tenemos que $[z]^{B_1} = [a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r]^{B_1}$. Entonces $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$ y por lo tanto $Nu(T) \subseteq gen\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$. Como ya habíamos probado la otra contención, tenemos que $Nu(T) = gen\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$.

Finalmente, usando la Proposición 1, como $\{[x_1]^{B_1}, [x_2]^{B_1}, \cdots, [x_r]^{B_1}\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{K}^n$ tenemos que $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{V}$. Por lo tanto $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ es una base de $Nu(T)$. Como las bases de $nul([T]_{B_1}^{B_2})$ y de $Nu(T)$ tienen la misma cantidad de elementos, se sigue que $\dim(Nu(T)) = \dim(nul([T]_{B_1}^{B_2}))$.

b): Por último, si $w \in Im(T)$, entonces existe $z \in \mathbb{V}$ tal que $w = T(z)$, entonces por la ecuación (1), tenemos que

$$[w]^{B_2} = [T(z)]^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}\ [z]^{B_1}.$$

Por lo tanto $[w]^{B_2} \in col([T]_{B_1}^{B_2})$.

Finalmente si $[w]^{B_2} \in col([T]_{B_1}^{B_2})$, entonces existe $x = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$[w]^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} x.$$

Sea $z := x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in \mathbb{V}$, entonces $[z]^B = x$ y, nuevamente por la ecuación (1), tenemos que

$$[w]^{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} x = [T]_{B_1}^{B_2}[z]^{B_1} = [T(z)]^{B_2}.$$

Entonces, usando que tomar coordenadas es lineal, nos queda que $[T(z) - w]^{B_2} = 0_{\mathbb{K}^m}$. Por lo tanto $T(z) = w$ y $w \in Im(T)$.

Más aún, usando que probamos en a) que $\dim(Nu(T)) = \dim(nul([T]_{B_1}^{B_2}))$, veamos que $\dim(Im(T)) = \dim(col([T]_{B_1}^{B_2}))$.

De hecho, aplicando el Teorema de la dimensión (tanto para tranformaciones lineales como matrices), tenemos que

$$\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(nul([T]_{B_1}^{B_2})) =$$

$$= \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(nul([T]_{B_1}^{B_2})) = \dim(col([T]_{B_1}^{B_2})).$$

□

Usando el resultado anterior, podemos demostrar el ejercico 18.

Ejercicio 18 : Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B una base de $\mathbb{V}$ y C una base de $\mathbb{W}$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $[T]_B^C$ la matriz de T respecto de las bases B y C. Demostrar que

a) T es monomorfismo si y sólo si, $nul([T]_B^C) = \{0\}$.

b) T es epimorfismo si y sólo si, $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.

c) T es isomorfismo si y sólo si, $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ y $[T]_B^C$ es inversible.

Dem. Para resolver el ejercicio, supongamos que $\dim(\mathbb{V}) = n$, $\dim(\mathbb{W}) = m$ y supongamos que $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$.

a): Supongamos que T es monomorfismo y veamos que $nul([T]_B^C) = \{0\}$.

Sea $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in nul([T]_B^C)$ y consideremos el siguiente vector $v := x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in \mathbb{V}$. Claramente $[v]^B = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T = x$. Entonces, por la Proposición 3, como $x = [v]^B \in nul([T]_B^C)$ se sigue que $v \in Nu(T)$. Como T es monomorfismo (por hipótesis), entonces $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $v = 0_{\mathbb{V}}$. Por lo tanto

$$0_{\mathbb{V}} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n,$$

como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ (en particular es LI) y tenemos una CL igualada al elemento neutro de $\mathbb{V}$ concluimos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, entonces $x = 0_{\mathbb{K}^n}$, y $nul([T]_B^C) = \{0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $nul([T]_B^C) = \{0\}$ y veamos que T es monomorfismo, o lo que es lo mismo, probemos que $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Sea $v \in Nu(T)$ entonces, por la Proposición 3, $[v]^B \in nul([T]_B^C)$. Entonces, como $nul([T]_B^C) = \{0\}$ tenemos que $[v]^B = 0_{\mathbb{K}^n}$ entonces $v = 0_{\mathbb{V}}$, $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y T es monomorfismo.

b): Supongamos que T es epimorfismo y veamos que $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})} = \mathbb{K}^m$ (acá usamos que al principio supusimos que $\dim(\mathbb{W}) = m$).

Sea $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T \in \mathbb{K}^m$ y consideremos el vector $w := y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n \in \mathbb{W}$, entonces $[w]^C = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T = y$. Como T es epimorfismo, es decir $Im(T) = \mathbb{W}$, entonces $w \in Im(T)$. Por lo tanto, por la Proposición 3, $[w]^C = y \in col([T]_B^C)$. Conclusión, probamos la contención $\mathbb{K}^m \subseteq col([T]_B^C)$, como siempre vale que $col([T]_B^C) \subseteq \mathbb{K}^m$, concluimos que $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.

Recíprocamente, supongamos que $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})} = \mathbb{K}^m$ y veamos que $Im(T) = \mathbb{W}$ es decir, T es epimorfismo.

Sea $w \in \mathbb{W}$, entonces como $[w]^C \in \mathbb{K}^m$, y $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^m$, se sigue que $[w]^C \in col([T]_B^C)$. Entonces, por la Proposición 3, $w \in Im(T)$. Conclusión, probamos la contención $W \subseteq Im(T)$. Como siempre vale que $Im(T) \subseteq \mathbb{W}$, concluimos que $Im(T) = \mathbb{W}$ y T es epimorfismo.

$c)$: La frase "$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$" la agregué a propósito porque sino la vuelta del ítem $c)$ podría no ser cierta. Si $\dim(\mathbb{V}) \neq \dim(\mathbb{W})$ entonces la frase "$[T]_B^C$ es inversible" no tiene sentido ya que para que esté definida la inversa de una matriz, esa matriz en principio, tiene que ser cuadrada (misma cantidad de filas que de columnas).

Supongamos que T es isomorfismo veamos que $[T]_B^C$ es inversible.

Recordemos que si T es isomorfismo, entonces $n = \dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) = m$ (lo probamos en la semana 4). Por lo tanto $[T]_B^C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Por otra parte, si T es isomorfismo entonces T es epimorfismo entonces, por el item $b)$, tenemos que $\dim(col([T]_B^C)) = rg([T]_B^C) = m = n$. Entonces, $[T]_B^C$ es una matriz de $n \times n$ y de rango completo, por lo tanto es inversible.

Recíprocamente, supongamos que $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) = n$ y que $[T]_B^C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible. Entonces $\dim(col([T]_B^C)) = rg([T]_B^C) = n$, por lo tanto $col([T]_B^C) = \mathbb{K}^n$ y por el item b) tenemos que T es epimorfismo. Por otra parte, como $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W})$ ya vimos en la semana 4, que si T es epimorfismo, entonces T es isomorfismo y probamos lo que queríamos. $\square$

El siguiente resultado lo usaremos para resolver el **ejercicio 1.20**.

Proposición 4. *Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}$ tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita y B, C y D bases de los espacios $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente. Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$. Entonces*

i) $[S \circ T]_B^D = [S]_C^D\ [T]_B^C$.

ii) Si $\dim(V) = \dim(\mathbb{W})$ *y T es un isomorfimo, entonces*

$$[T^{-1}]_C^B = ([T]_B^C)^{-1}.$$

Dem. $i)$: Sea $v \in \mathbb{V}$, entonces aplicando la ecuación (1), tenemos por un lado que

$$[S(T(v))]^D = [S]_C^D\ [T(v)]^C$$

y, por otro lado,

$$[S \circ T(v)]^D = [S \circ T]_B^D\ [v]^B.$$

Como $S \circ T(v) = S(T(v))$, juntando todo lo anterior se sigue que

$$[S \circ T]_B^D\ [v]^B = [S \circ T(v)]^D = [S(T(v))]^D = [S]_C^D\ [T(v)]^C.$$

Aplicando nuevamente la ecuación (1), tenemos que $[T(v)]^C = [T]_B^C\ [v]^B$ y volviendo a la ecuación anterior,

$$[S \circ T]_B^D\ [v]^B = [S]_C^D\ [T(v)]^C = [S]_C^D\ [T]_B^C\ [v]^B.$$

Es decir, tenemos que $[S \circ T]_B^D\ [v]^B = [S]_C^D\ [T]_B^C\ [v]^B$, para todo $v \in \mathbb{V}$.

Vimos en la semana 4, que si dos matrices A y B son tales que $A[v]^B = B[v]^B$ para todo $v \in \mathbb{V}$ entonces $A = B$. Por lo tanto, usando eso, concluimos que

$$[S \circ T]_B^D = [S]_C^D\ [T]_B^C$$

y demostramos lo que queríamos.

$ii)$: Supongamos que $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) = n$ y T es un isomorfismo; por un lado, sabemos que eso implica que T es inversible, es decir existe $T^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ y además probamos que $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$. Por otra parte, en el Ejercicio 18 item c), probamos que si $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) = n$ y T es un isomorfismo entonces $[T]_B^C$ es inversible. Veamos que $[T^{-1}]_C^B = ([T]_B^C)^{-1}$.

Como T^{-1} es la inversa de T, tenemos que $T \circ T^{-1} = I_{\mathbb{W}}$ y $T^{-1} \circ T = I_{\mathbb{V}}$.

Observar que $[I_{\mathbb{V}}]_B^B = I_{n\times n}$ y $[I_{\mathbb{W}}]_C^C = I_{n\times n}$, donde $I_{n\times n}$ denota la matriz identidad de $n \times n$. Si no están convencidos de esa igualdad, observar que si $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ entonces, por definición, tenemos que

$$[I_{\mathbb{V}}]_B^B = [[I_{\mathbb{V}}(v_1)]^B \ [I_{\mathbb{V}}(v_2)]^B \ \cdots \ [I_{\mathbb{V}}(v_n)]^B] = [[v_1]^B \ [v_2]^B \ \cdots \ [v_n]^B] = I_{n\times n}.$$

De manera similar, se prueba que $[I_{\mathbb{W}}]_C^C = I_{n\times n}$.

Entonces, usando el item $i)$, tenemos que

$$[T \circ T^{-1}]_C^C = [T]_B^C \ [T^{-1}]_C^B = [I_{\mathbb{W}}]_C^C = I_{n\times n} \text{ y}$$

$$[T^{-1} \circ T]_B^B = [T^{-1}]_C^B \ [T]_B^C = [I_{\mathbb{V}}]_B^B = I_{n\times n}.$$

Es decir, probamos que $[T]_B^C \ [T^{-1}]_C^B = [T^{-1}]_C^B \ [T]_B^C = I_{n\times n}$. Por lo tanto, la inversa de $[T]_B^C$ es $[T^{-1}]_C^B$, es decir

$$[T^{-1}]_C^B = ([T]_B^C)^{-1}.$$

□

Ejercicio 20 a) y b): Sea $T_{12} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la TL definida en el ejercicio 12 y $T_{15} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2)$ la TL definida en el ejercicio 15. Hallar la matriz de $T_{12} \circ T_{15}^{-1}$ en las bases canónicas que correspondan y hallar base de $Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$ (usando dicha matriz).

Dem. Sean $B = \{[1\ 1\ 1]^T, [1\ -1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T\}$ y $E = \{[1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Es inmediato ver que

$$[T_{12}]_B^E = [\ [T_{12}([1\ 1\ 1]^T)]^E \ [T_{12}([1\ -1\ 0]^T)]^E \ [T_{12}([0\ 0\ 1]^T)]^E\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

El ejercicio, nos pide $[T_{12}]_E^E$. Observar que, por la ecuación (1), por un lado vale que

$$[T_{12}(v)]^E = [T_{12}]_B^E \ [v]^B$$

y por el otro lado

$$[T_{12}(v)]^E = [T_{12}]_E^E \ [v]^E.$$

Por otra parte, en la semana 4 vimos que

$$[v]^B = [M]_E^B \ [v]^E,$$

donde $[M]_E^B$ es la matriz de cambio de base de E a B. Entonces, volviendo a la ecuación anterior, tenemos que

$$[T_{12}]_E^E \ [v]^E = [T_{12}(v)]^E = [T_{12}]_B^E \ [v]^B = [T_{12}]_B^E \ [M]_E^B \ [v]^E.$$

Es decir, $[T_{12}]_E^E\ [v]^E = [T_{12}]_B^E\ [M]_E^B\ [v]^E$, para todo $v \in \mathbb{V}$. Entonces (como la igualdad anterior vale para todo $v \in \mathbb{V}$) concluimos que

$$[T_{12}]_E^E = [T_{12}]_B^E\ [M]_E^B.$$

Observar que $[M]_B^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces, tal como vimos en la semana 4, tenemos $[M]_E^B = ([M]_B^E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$[T_{12}]_E^E = [T_{12}]_B^E\ [M]_E^B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por último, si $E' = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$[T_{15}]_E^{E'} = [\ [T([1\ 0\ 0]^T)]^{E'}\ [T([0\ 1\ 0]^T)]^{E'}\ [T([0\ 0\ 1]^T)]^{E'}\ ] =$$

$$= [\ [1+x]^{E'}\ [1+x^2]^{E'}\ [x+x^2]^{E'}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando lo que probamos en la Proposición 4, tenemos que

$$[T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E = [T_{12}]_E^E\ [T_{15}^{-1}]_{E'}^E = [T_{12}]_E^E\ ([T_{15}]_E^{E'})^{-1}.$$

Como $([T_{15}]_E^{E'})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Concluimos que

$$[T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E = [T_{12}]_E^E\ ([T_{15}]_E^{E'})^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, vamos a hallar una base de $Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$. En la Proposición 3 probamos que $v \in Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$ si y sólo si $[v]^{E'} \in nul([T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E)$.

Resolviendo el sistema homogéneo asociado a la matriz $[T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E$, es fácil ver que

$$nul([T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E) = gen\{[-1\ 1\ 0]^T, [5\ 0\ 1]^T\}.$$

Por lo tanto, usando la Proposición 3, tenemos que $\dim(Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})) = \dim(nul([T_{12} \circ T_{15}^{-1}]_{E'}^E)) = 2$. Por la misma proposición, tenemos que $p(x) := (-1)1 + (1)x = -1 + x \in Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$ y $q(x) := (5)1 + (1)x^2 = 5 + x^2 \in Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$. Por lo tanto,

$$Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1}) = gen\{-1 + x, 5 + x^2\}$$

y una base de $Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})$ puede ser $B_{Nu(T_{12} \circ T_{15}^{-1})} = \{-1 + x, 5 + x^2\}$.

$\square$